Cirkels en lijnen

11 maximumscore 5

- Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2+\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ 1
- Er moet gelden: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, dus $\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 0$ 1
- Hieruit volgt $4\cos(t) + 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) = 0$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Herleiden tot $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ 1
- De oplossingen: $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = \frac{4}{3}\pi$ 1

of

- Er geldt: $rc_{OP} = \dfrac{2\sin(t)}{2\cos(t)}$ (met $\cos(t) \neq 0$) en $rc_{OQ} = \dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)}$ 1
- Er moet gelden: $rc_{OP} \cdot rc_{OQ} = -1$, dus $\dfrac{2\sin(t) \cdot \sin(t)}{2\cos(t)\left(2+\cos(t)\right)} = -1$ 1
- Hieruit volgt $\sin^2(t) + 2\cos(t) + \cos^2(t) = 0$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Herleiden tot $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ 1
- De oplossingen: $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = \frac{4}{3}\pi$ 1

12 maximumscore 5

- Er geldt: $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \cos(t)-2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ — 1
- Een vectorvoorstelling van de lijn door P en Q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t)-2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ — 2
- Voor het snijpunt met de x-as geldt: $y=0$, dus $r=-2$ — 1
- Dus $x = 2\cos(t) + -2\left(\cos(t)-2\right) = 4$ (en dat is onafhankelijk van t) — 1

of

- Er geldt: $rc_{PQ} = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)-2}$ — 1
- Een vergelijking van de lijn door P en Q is $y = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)-2}(x - 2\cos(t)) + 2\sin(t)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 2
- Voor het snijpunt met de x-as geldt: $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)-2}(x-2\cos(t)) + 2\sin(t) = 0$ — 1
- Dus $x = -2\sin(t) \cdot \dfrac{\cos(t)-2}{\sin(t)} + 2\cos(t) = 4$ (en dat is onafhankelijk van t) — 1

of

- Omdat P en Q dezelfde hoeksnelheid hebben, is driehoek AOP gelijkvormig met driehoek ANQ (N is het middelpunt van c_Q) — 1
- Dus $\dfrac{OA}{NA} = \dfrac{OP}{NQ}$ — 1
- Hieruit volgt $\dfrac{2+NA}{NA} = \dfrac{2}{1}$ — 1
- Hieruit volgt $NA = 2$ — 1
- Dus de x-coördinaat van A is 4 (en dat is onafhankelijk van t) — 1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement van zowel het eerste als het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

13 maximumscore 6

- Er geldt: $M\left(1+\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$ 1
- Een vergelijking van c_P is $x^2 + y^2 = 4$ 1
- M ligt in het buitengebied totdat M op c_P ligt, dus de vergelijking $\left(1+\frac{3}{2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2 = 4$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t = 1,318...$ 1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de x-as, dus) $\frac{2(1,318... - 0,723)}{2\pi} = 0,1894...$ dus het gevraagde percentage is 19(%) 1

of

- Een vergelijking van c_P is $x^2 + y^2 = 4$ 1
- Er geldt: $M\left(1+\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$, dus een vergelijking van c_M is $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 1,5^2$ 1
- Beschrijven hoe de snijpunten van c_P en c_M (met de GR) gevonden kunnen worden 1
- Dit geeft $x = 1,375$ dus $1+\frac{3}{2}\cos(t) = 1,375$ 1
- Dit geeft $t = 1,318...$ 1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de x-as, dus) $\frac{2(1,318... - 0,723)}{2\pi} = 0,1894...$ dus het gevraagde percentage is 19(%) 1